上海某高中 2017-2018 学年度第一学期

高一数学期中试卷

微信关注公众号:橘子数学

满分 150 分,120 分钟完成,允许使用计算器,

答案一律写在答题纸上

2017.11

一. 填空 第 1-6 题每题 4 分,第 7-12 题每题 5 分.

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$, 则 $(A\cap\complement_U B)\cup(\complement_U A\cap B)=$ _____ .

2. 设集合 $M=\{x|0<x\leqslant 3\}$,$N=\{x|0<x\leqslant 2\}$, 那么"$a\in M$ "是"$a\in N$ "的 _____ 条件.

3. 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$ 的定义域为 _____ .

4. 已知集合 $A=\{x||x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\left|\dfrac{2x-a}{x+1}<1,x\in\mathbf{R}\right.\}$, 且 $A\cap B=\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

5. 已知 $y=f(x),y=g(x)$ 是两个定义在 $\mathbf{R}$ 上的二次函数,其 x,y 的取值如下表所示:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3	-4	-3	0
$g(x)$	0	1	0	-3

则不等式 $f(g(x))\geqslant 0$ 的解集为 _____ .

6. 关于 x 的不等式 $2kx^2+kx+\frac{3}{8}<0$ 的解集不为空集,则 k 的取值范围为 _____ .

7. 已知本张试卷的出卷人在公元 x^2 年时年龄为 $x-8$ 岁，则出卷人的出生年份是 _____ .(假设出生当年的年龄为 1 岁)

8. 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $|x| \geqslant ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

9. 设常数 $a>0$, 若 $9x+\dfrac{a^2}{x} \geqslant a+1$ 对一切正实数 x 成立, 则 a 的取值范围为 _____ .

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2, x \leqslant 0 \\ -x^2, x>0 \end{cases}$, 若 $f(f(a))=2$, 则 $a=$ ____ .

11. 若二次函数 $y=f(x)$ 对一切 $x \in \mathrm{R}$ 恒有 $x^2-2x+4 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2-4x+5$ 成立，且 $f(5)=27$，则 $f(11)=$ _____ .

12. 已知 $f(x)=(a^2-5)x^2+2x+2$. 若不等式 $f(x)>x$ 的解集为 A. 已知 $(0,1) \subseteq A$，则 a 的取值范围为 _____ .

二. 选择 第 13-16 题每题 5 分.

13. 设 P,Q 为两个非空实数集, 定义集合 $P+Q=\{a+b|a \in P, b \in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 _____ . ..... (　　)

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

14. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 _____ . ..... (　　)

A. $\{x|0 \leqslant x<1\}$　　B. $\{x|x<0$ 且 $x \neq -1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|x<1$ 且 $x \neq -1\}$

15. 已知三个不等式:$ab>0$,$bc-ad>0$,$\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0$(其中 a,b,c,d 均为实数), 用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 _____ . ..... (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

16. 设 $a>0$,$b>0$, 则以下不等式中不恒成立的是 _____ . ..... (　　)

A. $(a+b)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}) \geqslant 4$　　B. $a^3+b^3 \geqslant 2ab^2$

C. $a^2+b^2+2 \geqslant 2a+2b$　　D. $\sqrt{|a-b|} \geqslant \sqrt{a}-\sqrt{b}$

三. 简答　第 17-19 题每题 14 分，第 20 题 16 分，第 21 题 18 分.

17. (14 分) 已知 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 记其两条直角边长分别为 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 记面积为 S, 周长为 C. 若三角形面积为定值，其周长是否有最值，最大值还是最小值，何时取到，为多少（结果用 S 表示）?

18. (14 分) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $x^2 + x + |a - \frac{1}{4}| + |a| = 0$ 有实根，求 a 的取值范围.

19. (14 分) 先阅读下列不等式的证法，再解决后面的问题:

证明:$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$

证: 令 $A=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $B=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

$$\begin{aligned}\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}} &= \frac{a_1b_1}{AB}+\frac{a_2b_2}{AB}\\ &= \frac{a_1}{A}\cdot\frac{b_1}{B}+\frac{a_2}{A}\cdot\frac{b_2}{B}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{A^2}+\frac{b_1^2}{B^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a_2^2}{A^2}+\frac{b_2^2}{B^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{A^2}+\frac{b_1^2+b_2^2}{B^2}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

故 $(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$.

(1) 若 $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbf{R}^+$，利用上述结论，证明:

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2) \geqslant (\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2})^2$$

(2) 若 $x_1,y_1,x_2,y_2,z_1,z_2 \in \mathbf{R}^+$，模仿上述证法并结合 (1) 的证法，证明:

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) \geqslant (\sqrt[3]{x_1y_1z_1}+\sqrt[3]{x_2y_2z_2})^3$$

(提示:若 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$，有 $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$,)

20. (16 分) 公元 2222 年，有一种高危传染疾病在全球范围内蔓延，被感染者的潜伏期可以长达 10 年，期间会有约 0.05% 的概率传染给他人，一旦发病三天内即死亡。某城市总人口约 200 万人，专家分析其中约有 1000 名感染者，为了防止疾病继续扩散，疾病预防控制中心现决定对全市人口进行血液检测以筛选出被感染者。由于检测试剂十分昂贵且数量有限，需要将血样混合后一起检测以节约试剂。已知感染者的检测结果为阳性, 未被感染者则为阴性. 阳性血样与阴性血样混合后的检测结果为阳性, 同为阴性或阳性的血样混合后结果不发生改变.

(1) 若对全市人口进行平均分组，同一分组的血样将被混合到一起检测，若发现结果为阳性，则再在该分组内逐个检测排查. 设每个组 x 个人，那么最坏情况下，需要进行约多少次检测可以找到所有的被感染者？在当前方案下，若要使检测的次数尽可能少，每个分组的最优人数是？

(2) 在 (1) 的检测方案中，对于检测结果为阳性的组采取逐一检测排查的方法并不是很好，或可将这些组的血样再进行一次分组混合血样检测，然后再进行逐一排查。仍然考虑最坏的情况，请问两次要如何分组，使检测总次数尽可能少？

(3) 在 (2) 的检测方案中，进行了两次分组混合血样检测。仍然考虑最坏情况，若再进行若干次分组混合血样检测，是否会使检测次数更少？请给出最优的检测方案.

21. (18 分) 已知函数 $f(x)=ax^2-\frac{1}{2}x+c(a、c\in R)$，满足 $f(1)=0$，且 $f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in R$ 时恒成立.

(1) 求 $a、c$ 的值；

(2) 若 $h(x)=\frac{3}{4}x^2-bx+\frac{b}{2}-\frac{1}{4}$，解不等式 $f(x)+h(x)<0$；

(3) 是否存在实数 m，使函数 $g(x)=f(x)-mx$ 在区间 $[m,m+2]$ 上有最小值 -5？若存在，请求出 m 的值；若不存在，请说明理由.